INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES
STATISTICIENS ÉCONOMISTES
À L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

Juin 1978. — Option MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

NOTA :

1° Les seuls livres autorisés à cette épreuve sont les tables de logarithmes et les tables de fonctions de Flavien, Hennequin et Laborde.

2° La troisième question de la partie préliminaire n'est utile que dans la partie I. Les quatrième et cinquième questions de la partie préliminaire ne sont utiles que dans la partie VII.

Les parties I, II, III, IV, V, VI et VII sont largement indépendantes les unes des autres. Il est toutefois indispensable de traiter le I.1° et le I.2° pour pouvoir étudier tout le reste du problème, et il est également indispensable d'avoir résolu les questions IV. 1° et IV. 2° pour pouvoir traiter la partie VI.

3° Les résultats classiques relatifs à l'équation du troisième degré :

(E) $$x^3 + px + q = 0,$$

à coefficients réels, sont rappelés ci-dessous. Les candidats pourront les utiliser sans que la démonstration en soit demandée.

Si $4p^3 + 27q^2 > 0$, (E) a une racine réelle et deux racines non réelles conjuguées.

Si $4p^3 + 27q^2 = 0, p \neq 0, q \neq 0$, (E) a une racine double et une racine simple, toutes deux réelles.

Si $p = q = 0$, (E) a la racine triple zéro.

Si $4p^3 + 27q^2 < 0$, (E) a trois racines réelles, simples.

Dans le cas où $4p^3 + 27q^2 > 0$, l'unique racine réelle x_0 de (E) est donnée par la formule dite de Cardan :

$$x_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

4° Dans tout le problème, exception faite de la partie préliminaire et de la partie VII, les candidats auront normalement à s'aider de représentations graphiques. Il est toutefois rappelé qu'une figure ne peut à elle seule remplacer une démonstration.

5° On rappelle qu'une suite réelle est dite *convergente* si et seulement si elle admet une limite *finie*.

*
* *

PARTIE PRÉLIMINAIRE

1° Soit f une application *continue* de R dans R.

On définit une suite réelle $\{ x_n \}$ par la donnée du réel x_0 et la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Montrer que, si la suite $\{ x_n \}$ est convergente, sa limite l vérifie :

$$l = f(l).$$

.../...

2° Montrer que l'existence d'une racine de l'équation $x = f(x)$ n'est pas une condition *suffisante* de la convergence de la suite $\{ x_n \}$. On étudiera pour cela l'exemple suivant :

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{2}, \qquad x_0 > 1.$$

3° Une application f de R dans R est dite *contractante* s'il existe un réel *fixe* k, vérifiant $0 \leqslant k < 1$, tel que, pour tout couple de réels a, b, on ait l'inégalité :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant k \mid b - a \mid.$$

On définit une suite $\{ x_n \}$ par le procédé décrit au 1°, et on suppose dans toute cette question f contractante.

a. Montrer que f est uniformément continue sur R tout entier.

b. Montrer que l'équation :

$$x = f(x)$$

ne peut admettre deux racines distinctes.

c. Montrer que la suite $\{ x_n \}$ est convergente, et que sa limite l, indépendante de x_0, est l'unique racine de l'équation $x = f(x)$.

L'ensemble de ces résultats constitue le *théorème du point fixe* dans R.

4° *Cette question est sans rapport avec les trois précédentes.*

A la suite réelle $\{ x_n \}$, définie par un procédé quelconque, on associe la suite $\{ y_n \}$ de terme général :

$$y_n = \frac{\sum_{k=0}^{k=n} x_k}{n + 1}.$$

On suppose la suite $\{ x_n \}$ convergente, de limite l. Montrer que la suite $\{ y_n \}$ est aussi convergente et de limite l.

On démontrera d'abord le résultat dans le cas où $l = 0$. Il sera utile de prouver que, pour tout entier naturel p tel que $p < n + 1$,

$$|y_n| \leqslant \frac{\sum_{k=0}^{k=p} |x_k|}{n + 1} + \sup_{k > p} |x_k|.$$

5° On suppose qu'il existe un entier *fixe* k, strictement positif, et un réel l non nul tel que, $\{ x_n \}$ désignant toujours une suite réelle de terme général x_n,

$$\lim_{n \to +\infty} [x_{n+k} - x_n] = l.$$

Montrer, en utilisant la question précédente, l'équivalence :

$$x_n \sim \frac{l}{k} n \qquad \text{si } n \to +\infty.$$

Partie I

Dans cette partie et dans toutes les suivantes, a est un réel *strictement positif* auquel on associe l'application continue f_a de R dans R définie par :

$$f_a(x) = \frac{a(a^2 + 1)}{x^2 + 1},$$

ce qui permet ensuite de définir une suite $\{ x_n \}$, dépendant à la fois de a et de x_0, par la donnée du réel x_0 et la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = f_a(x_n).$$

1° Résoudre dans R l'équation :

$$x = f_a(x).$$

2° Étudier les variations de $f_a(x)$, les représenter graphiquement et préciser le sens de concavité du graphe de f_a.

3° Calculer en fonction de a :

$$M_0(a) = \sup_{x \in R} |f'_a(x)|.$$

. . . /. . .

4° Résoudre dans R, à l'aide de la formule de Cardan, l'équation à inconnue a :

$$M_0(a) = 1,$$

dont on notera a_0 la racine, puis constater que $0 < a < a_0$ équivaut à $M_0(a) < 1$.

5° On suppose $0 < a < a_0$. Déterminer la nature de la suite $\{ x_n \}$.

6° Calculer une valeur décimale approchée de a_0, avec la précision permise par les tables dont dispose le candidat. Celui-ci mentionnera la ou les tables utilisées.

Partie II

a est toujours strictement positif, et la définition de f_a et celle de la suite $\{ x_n \}$ sont les mêmes que dans la partie I.

1° On définit, pour $x \geqslant 0$, $\Phi_a(x)$ par les égalités :

$$\Phi_a(x) = \left| \frac{f_a(x) - a}{x - a} \right| \text{ si } x \neq a, \qquad \Phi_a(a) = |f'_a(a)|.$$

Expliciter $\Phi_a(x)$.

Étudier les variations de $\Phi_a(x)$ lorsque x décrit $[0, +\infty[$. Calculer en fonction de a :

$$M_1(a) = \sup_{x \in R^+} \Phi_a(x).$$

2° Résoudre dans R l'équation à inconnue a :

$$M_1(a) = 1,$$

dont on notera a_1, la racine, puis constater que $0 < a < a_1$, équivaut à $M_1(a) < 1$.

3° On suppose $0 < a < a_1$. Déterminer la nature de la suite $\{ x_n \}$.

4° Calculer une valeur décimale approchée de a_1, avec la précision permise par les tables dont dispose le candidat. Comparer a_0, a_1, et 1. La méthode développée dans la partie II constitue-t-elle une amélioration par rapport à celle de la partie I ?

5° Peut-on comparer a_1 et a_0 sans recourir à l'emploi des valeurs décimales approchées ?

Partie III

On suppose dans toute cette partie que $a = 1$, et l'on pose donc :

$$f_1(x) = \frac{2}{x^2 + 1}.$$

On définit g_1 en posant :

$$g_1 = f_1 \circ f_1$$

(On rappelle que ceci signifie que $g_1(x) = f_1[f_1(x)]$.)

1° Expliciter $g_1(x)$. Calculer $g'_1(x)$ et $g''_1(x)$. Étudier les variations de $g_1(x)$ lorsque x décrit R, représenter avec grand soin le graphe de g_1, et déterminer, selon les valeurs de x, le signe de $g''_1(x)$. Étudier également le signe de la différence $[x - g_1(x)]$.

2° Déduire de ce qui précède la nature de la suite $\{ x_n \}$ lorsque $a = 1$. Il conviendra pour cela d'étudier séparément les sous-suites $\{ x_{2p} \}$ et $\{ x_{2p+1} \}$.

Partie IV

On étudie dans cette partie la nature de la suite $\{ x_n \}$ en supposant que : $a_1 \leqslant a < 1$.

1° On pose, comme dans la partie III,

$$g_a = f_a \circ f_a.$$

Expliciter $g_a(x)$, dont on étudiera les variations lorsque x décrit R.

On ne calculera pas $g''_a(x)$.

2° Calculer $[(x^2 + 1)^2 + a^2(a^2 + 1)^2] \times [x - g_a(x)] = P_a(x)$. Vérifier que P_a est un polynôme tel que $P_a(a) = 0$. On pose :

$$P_a(x) = (x - a)\, Q_a(x).$$

Calculer $Q_a(x)$ en effectuant la division.

. . . / . . .

3° On se propose de trouver le signe de $Q_a(x)$ lorsque $x > a$ et, comme indiqué au début, $a_1 \leqslant a < 1$.

La définition de g_1 étant celle de la partie III, on pose :

$$P_1(x) = [(x^2 + 1)^2 + 4] \times [x - g_1(x)],$$
$$P_1(x) = (x - 1)\, Q_1(x).$$

Calculer la différence $[Q_a(x) - Q_1(x)]$ et effectuer la mise en facteur de $(1 - a)$.

De ce calcul, déduire le signe de $Q_a(x)$ lorsque $x > a$ et $a_1 \leqslant a < 1$.

4° De la question précédente, déduire la nature de la suite $\{ x_n \}$ lorsque $a_1 \leqslant a < 1$.

Partie V

On étudie dans cette partie la nature de la suite $\{ x_n \}$ en supposant $a > 1$, $x_0 \neq a$ et $x_0 \neq -a$.

Calculer $f'_a(a)$, puis $[|f'_a(a)| - 1]$, dont on déterminera le signe.

A l'aide de ce qui précède, montrer que la suite $\{ x_n \}$ n'est pas convergente. On pourra raisonner par l'absurde.

Partie VI

On se propose dans cette partie de retrouver les résultats des parties I, II, IV, V par une méthode différente, plus difficile, mais aussi plus précise dans ses résultats.

1° On suppose seulement dans cette question $a > 0$. On considère le polynôme Q_a obtenu au IV, 2°. Calculer $Q'_a(x)$.

En admettant provisoirement que Q'_a a un zéro réel et un seul, noté $x_0(a)$, classer, selon les valeurs de a, les réels a et $x_0(a)$.

2° On suppose $a < 1$. Q_a a-t-il des zéros réels? Quel est, selon les valeurs de x, le signe de $[x - g_a(x)]$?

3° On suppose $a > 1$. Combien Q_a a-t-il de zéros réels? Indiquer le signe de ces zéros et les classer par rapport au réel a. En déduire l'étude du signe de $[x - g_a(x)]$ selon les valeurs de x.

4° A l'aide des résultats de la question 2° ci-dessus, retrouver les résultats des parties I, II, IV.

5° A l'aide de la question 3° ci-dessus, retrouver le résultat de la partie V et, de plus, préciser complètement le comportement des sous-suites $\{ x_{2p} \}$ et $\{ x_{2p+1} \}$.

6° Montrer maintenant que Q'_a a un zéro réel et un seul.

Pour cela on posera :

$$x = X + \frac{a^3}{4}, \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{4} Q'_a\left(X + \frac{a^3}{4}\right) = H_a(X).$$

On vérifiera que $H_a(x)$ est de la forme $(X^3 + pX + q)$, où p et q sont des polynômes en a que l'on calculera. On évaluera ensuite $(4p^3 + 27q^2)$ et on montrera que cette expression est strictement positive pour tout a.

Les candidats sont avertis que ce calcul est compliqué et exige une grande attention.

Partie VII

1° On suppose $0 < a < 1$. Quelle est la nature de la *série* de terme général $(x_n - a)$?

2° On suppose $a = 1$ et on se propose d'étudier la nature de la série de terme général $(x_n - 1)$ en supposant $x_0 \neq 1$ et $x_0 \neq -1$.

Posons $x_n - 1 = x'_n$. En utilisant la fonction g_1 définie à la partie III, exprimer x'_{n+2} en fonction de x'_n. Notons :

$$x'_{n+2} = h(x'_n)$$

la relation obtenue.

Écrire le développement limité, lorsque $X \to 0$, de $h(X)$ selon les puissances de X, à l'ordre 3 inclus. En déduire :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{x'^2_{n+2}} - \frac{1}{x'^2_n} \right)$$

(on trouvera une limite finie non nulle).

En déduire, à l'aide de la question 5° de la partie préliminaire, un infiniment petit très simple équivalent, lorsque $n \to +\infty$, à la somme $(x'_n + x'_{n+1})$.

En déduire la nature de la série de terme général x'_n.

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail